

Conceitos Básicos de Ondas - II

Professor: Rodrigo Jordão

Resumo

A Fórmula de Taylor

Se pegarmos um pedaço da corda de tamanho Δx , e a corda tiver densidade linear igual a μ .

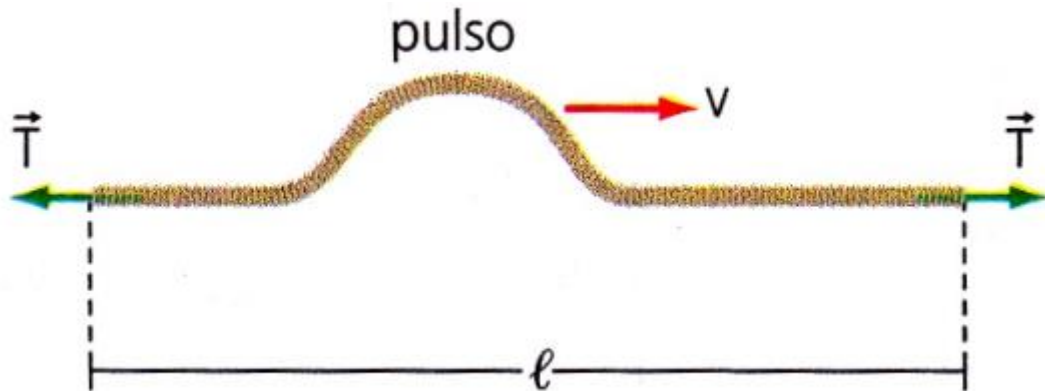


Figura 1. Corda propagando com velocidade v .

A massa desse comprimento Δx será:

$$\Delta m = \mu \cdot \Delta x$$

Quando a onda passar por esse pedacinho de corda, no ponto inicial teremos uma inclinação $\theta(x)$ com a horizontal e no final uma inclinação $\theta(x + \Delta x)$. Sendo assim, decompondo a tensão na corda na vertical, considerando que o ângulo é bem pequeno:

$$T \cdot \sin(\theta) = T \cdot \tan(\theta) = T \cdot \frac{\partial y}{\partial x}$$

Fazendo a equação de equilíbrio do pedacinho de corda na vertical:

$$T \cdot \frac{\partial y}{\partial x}(x + \Delta x) - T \cdot \frac{\partial y}{\partial x}(x) = T \cdot \Delta x \left[\frac{\frac{\partial y}{\partial x}(x + \Delta x) - \frac{\partial y}{\partial x}(x)}{\Delta x} \right] = T \cdot \Delta x \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = F_R = \Delta m \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \mu \cdot \Delta x \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Logo,

$$T \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \mu \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{1}{T/\mu} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$$

Relembrando a equação da onda:

$$\frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$$

Podemos concluir então que:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Observação: Integral de $\sin^2(\theta)$

$$\int_0^\tau \sin^2(\theta) d\theta = \frac{\tau}{2}$$

Intensidade de uma onda

Já sabemos que a equação de uma onda harmônica progressiva é:

$$y(x, t) = A \cdot \cos(kx - \omega t + \delta)$$

Derivando a equação em relação a x e t :

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -kA \cdot \sin(\delta)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \omega A \cdot \sin(\delta)$$

Decompondo a tração no eixo vertical temos:

$$F_y = -T \cdot \frac{\partial y}{\partial x}$$

A potência é expressa pelo produto da força com a velocidade:

$$Pot = F_y \cdot \frac{\partial y}{\partial t} = -T \cdot \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} = Tk\omega A^2 \sin^2(\varphi)$$

A intensidade vai ser a potência média durante o período.

$$I = Pot_{med} = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau Tk\omega A^2 \cdot \sin^2(\theta) dt = \frac{1}{2} \cdot Tk\omega A^2 = \frac{1}{2} \cdot v^2 \mu k \omega A^2 = \frac{1}{2} \cdot \mu v \omega^2 A^2$$

Interferência de ondas no mesmo sentido

Sejam as ondas:

$$y_1(x, t) = A_1 \cdot \cos(kx - \omega t + \delta_1)$$

$$y_2(x, t) = A_2 \cdot \cos(kx - \omega t + \delta_2)$$

$$y_1 + y_2 = y(x, t) = A \cdot \cos(kx - \omega t + \delta)$$

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\delta_{12}), \delta_{12} = \delta_2 - \delta_1$$

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\delta_{12})$$

$$\delta_{12} = 2m\pi; (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \rightarrow I_{max} = (\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2})^2$$

$$\delta_{12} = (2m + 1)\pi; (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \rightarrow I_{min} = (\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2})^2$$

Interferência de ondas em sentidos opostos

Sejam as ondas:

$$y_1(x, t) = A_1 \cdot \cos(kx - \omega t + \delta_1)$$

$$y_2(x, t) = A_2 \cdot \cos(kx + \omega t + \delta_2)$$

$$A_1 = A_2 = A, \delta_1 = \delta_2 = 0$$

$$y_1 + y_2 = y(x, t) = A \cdot \cos(kx - \omega t) + A \cdot \cos(kx + \omega t) = 2A \cdot \cos(kx) \cos(\omega t)$$

Pela equação encontrada podemos concluir que não há propagação, trata-se de uma onda estacionária.

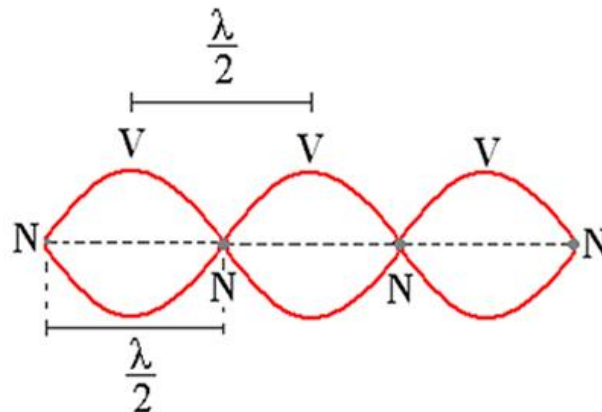


Figura 2. Onda estacionária.

Onde os pontos N são chamados de “nodos” e os pontos V de “ventre”.

Batimento e velocidade de grupo

Ondas no mesmo sentido com $A_1 = A_2 = A$ e $\omega_1 \neq \omega_2$

$$\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2 \ll \bar{\omega} = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$$

$$\Delta k = k_1 - k_2 \ll \bar{k} = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

$$y_1(x, t) = A_1 \cdot \cos(k_1 x - \omega_1 t)$$

$$y_2(x, t) = A_2 \cdot \cos(k_2 x + \omega_2 t)$$

$$k_1 = \bar{k} + \frac{\Delta k}{2}$$

$$\omega_1 = \bar{\omega} + \frac{\Delta\omega}{2}$$

$$y = y_1 + y_2 = A \left\{ \cos \left[\left(\bar{k} + \frac{\Delta k}{2} \right) x - \left(\bar{\omega} + \frac{\Delta\omega}{2} \right) t \right] + \cos \left[\left(\bar{k} - \frac{\Delta k}{2} \right) x - \left(\bar{\omega} - \frac{\Delta\omega}{2} \right) t \right] \right\}$$

$$y = 2A \cdot \cos(\Delta k x - \Delta\omega t) \cos(\bar{k} x - \bar{\omega} t)$$

A velocidade da onda moduladora é chamada de velocidade de grupo e a velocidade da onda portadora é chamada de velocidade de fase.

$$V_G = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$$

$$V_{fase} = \frac{\bar{\omega}}{\bar{k}}$$

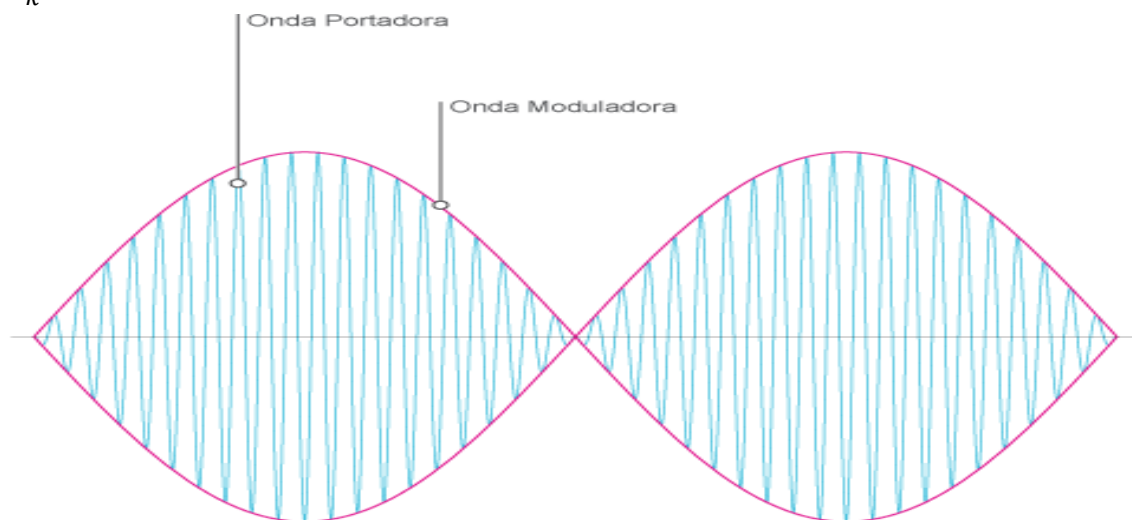


Figura 3. Fenômeno de Batimento.

Reflexão de ondas

A reflexão de ondas pode acontecer em extremidades fixas ou móveis.

Em extremidades fixas ocorre a inversão de fase:

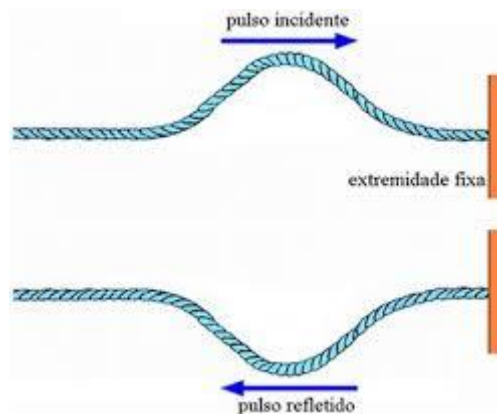


Figura 4. Reflexão de ondas em extremidades fixas.

Em extremidades móveis não ocorre inversão de fase:

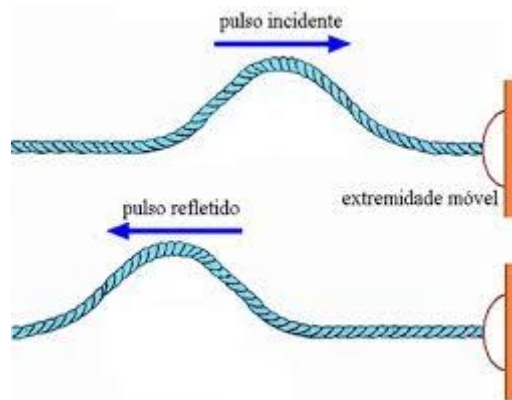


Figura 5. Reflexão de ondas em extremidades móveis.

Junção de duas Ondas

Duas cordas A e B , unidas, submetidas a mesma tração, sendo $\mu_A < \mu_B$. Se a onda vem da corda mais pesada para a mais leve, entende como extremidade móvel e parte da continua é transmitida para a corda mais leve e parte da onda volta com a mesma fase. Se a onda vem da corda mais leve para a mais pesada acontece o mesmo, porém, ocorre a inversão de fase.

A relação entre as duas velocidades é dada por:

$$v_A^2 \mu_A = v_B^2 \mu_B$$